# תרגיל 2.19

בתרגיל זה נוכיח את משפט הדרגה הפוך:  
יהי V מ"ו ממימד n.

1. יהיו ת"מ כך שמתקיים . הוכיחו שקיימת הע"ל כך ש
2. הסיקו שלכל שני מספרים k,m כך ש קיימת הע"ל כך ש

## פתרון

א) מקרה ראשון: או . אם אז ניקח נקבל , . אם ניקח ונקבל .

מקרה שני: . ניקח בסיס B לW ובסיס C לU . נשלים את B לבסיס D עבור V: . נגדיר הע"ל באופן הבא: . קיימת הע"ל שכזו והיא יחידה ע"פ משפט

ההגדרה. נראה שמתקיים :  
 כי לכל מתקיים . *נוכיח את ההכלה ההפוכה. יהי . מתקיים , מצד שני כי D בסיס לV.*  
אבל ידוע ש בסיס ולכן בת"ל*, לכן לכן:  
לכן*

*מצד שני מתקיים (כי כל ). ממשפט הדרגה מתקיים  
לכן*

ב) מיידי מא'.

### הערה

תרגיל 2.20

# תרגיל 2.20

יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה . תהא העל. הוכיחו:

1. יהא כך ש. נסמן . הוכיחו:
2. אם בסיס עבור אזי בסיס עבור V.

## פתרון

א) , , לכן . נניח בשלילה ש אזי ⇦ ⇦ סתירה, לכן .

ב) מיידי ממשפט הדרגה, כי ⇦

ג)   
קיבלנו . נראה ש, אחרת קיים כך ש. מתקיים (אחרת ). כמו כן . לכן ונקבל סתירה. מכאן . לכן , מתקיים וכן שוויון מימדים, לכן

ד) נניח בסיס עבור . צ"ל בסיס עבור V  
הוכחה: נראה תחילה שB בת"ל. אחרת\ נקבל ש (נתון ש בת"ל). מצב זה לא יתכך כי אז בסתירה לבחירת .  
מתקיים , בת"ל מגודל n ולכן היא גם פורשת(בסה"כ בסיס)

# תרגיל 2.24

הוכיחו או הפריכו: תהא הע"ל. יהי בסיס עבור V כך שלכל מתקיים אזי

## תשובה

הפרכה: יהי עם הבסיס הסטנדרטי. נגדיר . המטריצה המייצגת של T היא , לכן

# שאלה ממבחן

תהא

1. הוכיחו שלמטריצת A ו מתקיים
2. יהיו כך ש. הוכיחו ש
3. תהי המקיימת . הוכיחו ש

## פתרון

א. ⬄ ⬄ ⬄

ב. נניח בשלילה ש, אזי נקבל מא' ש. ממשפט הדרגה נקבל

ג. נתון ולכן ע"פ א' () נקבל . ממשפט הדרגה . מתקיים ⇦ . מ(\*) נקבל לכן ⇦

# עוד שאלה ממבחן

יהיו

1. הוכיחו שאם עמודות בת"ל אזי גם עמודות B בת"ל.
2. נניח שעמודות B בת"ל. הראו שתנאי הכרחי לכך שעמודות AB בת"ל הוא

## פתרון

א. נתון שעמודות AB בת"ל. לכן . כמו כן . לכן ⇦ מספר העמודות של B הוא k לכן

ב. יש להוכיח שאם עמודות AB בת"ל אזי . הוכחה: , כמו כן , לכן